

## Урок № 55      Тема. Тригонометричні тотожності

Мета: домогтися засвоєння учнями означень синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника та їх властивостей; розглянути тригонометричну тотожність та наслідок із неї; формувати вміння перетворювати тригонометричні вирази за допомогою тригонометричних тотожностей.

Тип уроку: засвоєння вмінь та навичок.

Наочність та обладнання: конспект 21.

Хід уроку

I. Організаційний етап

II. Перевірка домашнього завдання

Розв'язання письмових завдань домашньої роботи перевіряється за готовими рисунками до домашніх задач.

Засвоєння змісту теорії, вивченої на попередньому уроці, проводиться у формі математичного диктанту.

Математичний диктант

	Варіант 1	Варіант 2
1	Закінчіть речення: «Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається...»	Запишіть, використовуючи позначення: косинус $60^\circ$ $\frac{1}{2}$ дорівнює $\frac{1}{2}$ .
2	Запишіть, використовуючи позначення: косинус кута $45^\circ$ $\frac{7}{9}$ наближено дорівнює $\frac{7}{9}$ .	Закінчіть речення: «Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається...»
3	Обчисліть косинус гострого кута В прямокутного трикутника, у якому катет АС = 11 см, інший катет — 60 см, а гіпотенуза дорівнює 61 см	Обчисліть косинус гострого кута М прямокутного трикутника, у якому катет РО = 21 см, інший катет — 20 см, а гіпотенуза дорівнює 29 м
4	Обчисліть синус кута М прямокутного трикутника, якщо його катет МК дорівнює 45 см, другий катет — 28 см, а гіпотенуза — 53 см	Обчисліть тангенс кута F прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 29 дм, катет ЕА — 20 дм, а інший катет — 21 дм
5	Чи може синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати 1,01?	Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Якого виду цей трикутник?
6	Обчисліть тангенс гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника	Чи може косинус гострого кута прямокутного трикутника порівнювати 1,02?

III. Формулювання мети і завдань уроку

Поштовхом до інтелектуальної діяльності учнів може слугувати запропоноване вчителем завдання.

Завдання. Виконайте зображення прямокутного трикутника з катетами  $a$ ,  $b$  і гіпотенузою  $c$ . Кути, протилежні катетам  $a$  і  $b$ , позначте відповідно  $\alpha$ ,  $\beta$ . Запишіть відношення, яким дорівнюють  $\operatorname{tg} \alpha$  та  $\operatorname{ctg} \alpha$ . Порівняйте записані відношення. Що ви помітили? Чи зміниться результат, якщо взяти інший прямокутний трикутник? Сформулюйте здобутий результат у вигляді твердження.

Мета запропонованого завдання — наочно продемонструвати учням існування певних залежностей між тригонометричними функціями деякого гострого кута. Далі вчитель наголошує на тому, що для інших тригонометричних функцій (крім тангенса і котангенса) одного й того самого кута також існують певні залежності; їх вивчення і становить основну мету уроку.

IV. Актуалізація опорних знань

З метою формування свідомого розуміння учнями змісту та схем доведення тригонометричних тотожностей учні мають повторити зміст теореми Піфагора, означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника.

Виконання усних вправ

1. Закінчіть речення:

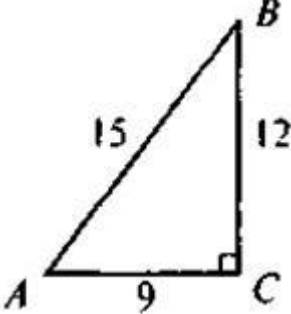
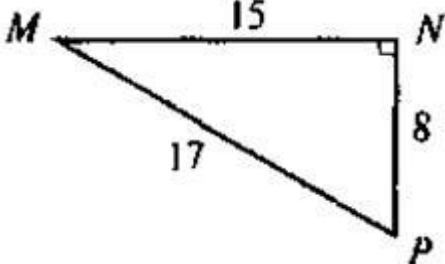
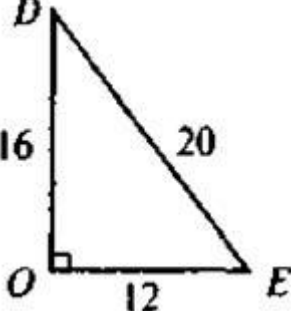
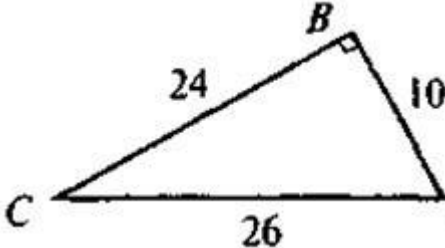
1) Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 9 см, то гіпотенуза дорівнює...

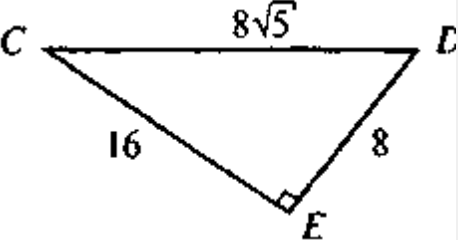
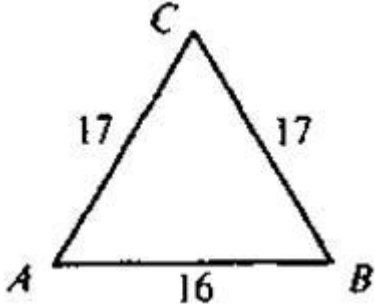
2) Якщо дві більші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 17 і 15, то третя сторона дорівнює...

3) Якщо діагональ квадрата дорівнює 12 см, то сторона квадрата має довжину...

4) Якщо діагоналі ромба мають довжини 12 см і 16 см, то сторона ромба має довжину...

2. Виконайте завдання за готовими рисунками

1		Знайти: $\cos B$ , $\operatorname{tg} A$
2		Знайти: $\sin P$ , $\cos M$
3		Знайти: $\operatorname{tg} D$ , $\sin E$ , $\cos D$
4		Знайти: $\sin A$ , $\cos A$ , $\operatorname{tg} A$

5		Знайти: $\operatorname{tg} D$ , $\operatorname{tg} C$
6		Знайти: $\cos A$ , $\cos B$

### V. Засвоєння знань

План вивчення нового матеріалу

1. Теорема, що виражає основну тригонометричну тотожність.

2. Наслідок з основної тригонометричної тотожності.

3. Співвідношення для тангенса і котангенса одного й того самого гострого кута прямокутного трикутника.

4. Приклади задач.

@ Зміст нового матеріалу включає в себе формулювання і доведення чотирьох основних тотожностей для тригонометричних функцій одного й того ж гострого кута.

Вивчення нового матеріалу проводимо відповідно до способу викладення його в підручнику, проте до наведеного в підручнику прикладу на застосування вивчених тотожностей для обчислення значень тригонометричних функцій бажано додати приклад на застосування вивчених формул для перетворення тригонометричних виразів (з демонстрацією прийому введення тригонометричної одиниці). Перевірка розуміння учнями вивчених тотожностей проводиться за питаннями:

1) Чи правильне твердження: сума квадратів синуса і косинуса гострого кута дорівнюють 1?

2) Чи правильне твердження: добуток тангенса кута на котангенс кута дорівнює 1?

3) Чи може синус і косинус деякого гострого кута дорівнювати відповідно: а)  $\frac{1}{3}$  і  $\frac{2}{3}$ ;

б)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  і  $\frac{1}{2}$ ; в) 1 і 0?

4) Чи можуть тангенс і котангенс деякого гострого кута дорівнювати відповідно: а)  $\frac{1}{2}$  і 2;

б)  $\frac{1}{3}$  і -3; в) 1 і 1?

5) Які вирази слід дописати, щоб рівності стали тотожностями ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — деякі гострі кути)?

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \dots \quad \dots$$

$$; \quad \sin 2\gamma + \dots = 1; \quad \operatorname{tg} \gamma \cdot \dots = 1; \quad 1 = \dots; \quad \dots = \operatorname{ctg} 2\alpha;$$

$$\cos 2(\alpha + \beta) + \dots = 1; \quad \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \dots; \quad 1 - \sin 2 \beta = \dots;$$

$$\cos 2 \beta + \sin 2 \beta - \cos 2 \alpha - \sin 2 \alpha = \dots$$

## VI. Формування первинних умінь

### Виконання графічних вправ

Накресліть гострий кут. Позначте на різних сторонах кута дві точки і проведіть із них перпендикуляри до іншої сторони кута.

а) Виміряйте сторони прямокутних трикутників, що утворилися, та обчисліть двома способами синус і косинус побудованого кута. Порівняйте результати.

б) Обчисліть тангенс побудованого кута двома способами — за означенням та відповідною тригонометричною тотожністю. Порівняйте результати.

### Виконання письмових вправ

1. Визначте, чи можуть синус і косинус одного кута відповідно дорівнювати: а)  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
 б)  $\frac{1}{3}$  і  $\frac{3}{4}$ .

2. Визначте, чи можуть тангенс і котангенс одного кута відповідно дорівнювати:

3. а) 0,4 і 2,5;

4. б) 1,1 і 0,9;

5. в)  $\sqrt{5} + 2$  і  $\sqrt{5} - 2$ .

6. Знайдіть:

а)  $\sin \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ;

б)  $\cos \alpha$ , якщо  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ;

в)  $\operatorname{tg} \alpha$ , якщо  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ .

7. Знайдіть значення тригонометричних функцій гострого кута А, якщо:

а)  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\cos A = 0,28$ .

8. Спростіть вираз:

а)  $1 - \cos 2 \alpha$ ;

б)  $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$ ;

в)  $1 + \sin \alpha + \cos 2 \alpha$ .

9. Спростіть вираз:

а)  $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$ ;

б)  $\cos \alpha - \cos \alpha \sin 2 \alpha$ ;

в)  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos 2 \alpha$ .

@ Вправи, які слід виконати учням після вивчення нового матеріалу, спрямовані на закріплення знань формул, а також на формування вмінь використовувати вивчені формули під час розв'язування завдань таких типів: перевірка можливості існування кута з даними значеннями тригонометричних функцій, обчислення значень тригонометричних функцій, застосування тотожностей для спрощення тригонометричних виразів.

### VII. Підсумки уроку

Чи правильні наведені рівності?

1)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$ ;

2)  $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$ ;

3)  $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha$ ;

4)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ ;

5)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1$ .

### VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст та доведення теореми про основну тригонометричну тотожність і наслідки з неї.

Розв'язати задачі.

1. Знайдіть  $\operatorname{tg} \alpha$ , якщо: а)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ; б)  $\cos \alpha = \frac{3}{2}$ .

2. Спростіть вираз: а)  $1 - \cos^2 \alpha$ ; б)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$ ; в)  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$ .

3. Знайдіть: а)  $\operatorname{ctg} \alpha$ , якщо  $\sin \alpha = 0,5$ ; б)  $\operatorname{tg} \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

4. Спростіть вираз: а)  $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$ ; б)  $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2 \alpha$ ; в)  $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .