

## Урок № 54    Тема. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

Мета: домогтися засвоєння учнями змісту означень синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника та їх властивостей, що випливають із теореми Піфагора, подібності прямокутних трикутників та властивостей сторін прямокутного трикутника (проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки). Сформувати вміння відтворювати зміст означень та їх властивостей, а також знаходити значення тригонометричних функцій гострого кута за даними прямокутного трикутника.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Наочність та обладнання: конспект «Означення тригонометричних функцій гострого кута».

### Хід уроку

#### I. Організаційний етап

Як завжди, на початку вивчення нового розділу слід надати учням інформацію:

- про орієнтовний план вивчення розділу;
- кількість навчальних годин;
- приблизний зміст матеріалу;
- основні вимоги до знань та вмінь учнів;
- приблизний зміст завдань, що будуть винесені на контроль.

(Цю інформацію можна помістити на стенді «Довідково-інформаційний куточок» у кабінеті математики та з метою економії часу запропонувати учням для самостійного ознайомлення в позаурочний час).

#### II. Перевірка домашнього завдання

Якщо вдома учні виконували письмове завдання (аналіз розв'язання задач контрольної роботи або корекційну роботу тощо), то правильність виконання цієї роботи вчитель перевіряє, зібравши зошити учнів на перевірку.

#### III. Формулювання мети і завдань уроку

Щоб сформулювати мету уроку, достатньо слів учителя про те, що в науці і техніці часто розв'язують задачі, в яких за відомими стороною і кутом прямокутного трикутника треба знайти невідомі його сторони і кути, або навпаки, знаючи сторони прямокутного трикутника, обчислити його кути. Прикладом таких задач є добре відомі задачі на застосування співвідношень між катетом, що лежить проти кута  $30^\circ$ , і гіпотенузою, рисунки до яких подані нижче (див. рис. 1).

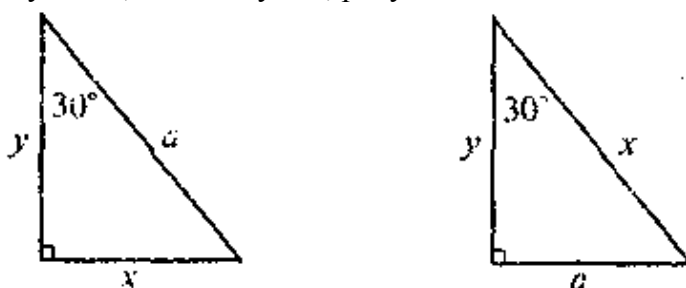


Рис. 1

Знайдіть  $x$ ,  $y$ , якщо  $a$  — відоме.

Розв'язання цих задач демонструє залежність між довжиною катета, протилежним кутом  $30^\circ$  і довжиною гіпотенузи, тобто залежність між сторонами прямокутного трикутника та його кутом. Міркуючи послідовно, можна передбачити існування загальних залежностей між сторонами і кутами прямокутного трикутника, які можуть бути записані в алгебраїчному вигляді і одним з окремих випадків яких є відоме співвідношення між довжиною катета, протилежним кутом  $30^\circ$  і довжиною гіпотенузи. Отже, мета уроку визначається як необхідність вивчення співвідношень

між сторонами і кутами прямокутного трикутника та вивчення їх властивостей, а також опанування способів застосування цих співвідношень під час розв'язування задач.

#### IV. Актуалізація опорних знань

З метою формування свідомого розуміння учнями змісту означень відношень між сторонами і кутами прямокутного трикутника та їх властивостей учні мають повторити зміст означення прямокутного трикутника та його елементів (поняття катета, що лежить проти даного гострого кута, та катета, що прилеглий до даного кута), ознак подібності прямокутних трикутників та властивості сторін подібних трикутників.

Повторення цього матеріалу можна провести у формі бесіди або під час виконання усних вправ.

#### Виконання усних вправ

На рис. 2 знайдіть усі пари подібних прямокутних трикутників і доведіть їх подібність. У кожному трикутнику назвіть найменший катет та кут, що лежить проти цього катета, а також кут, що є прилеглим до цього катета.

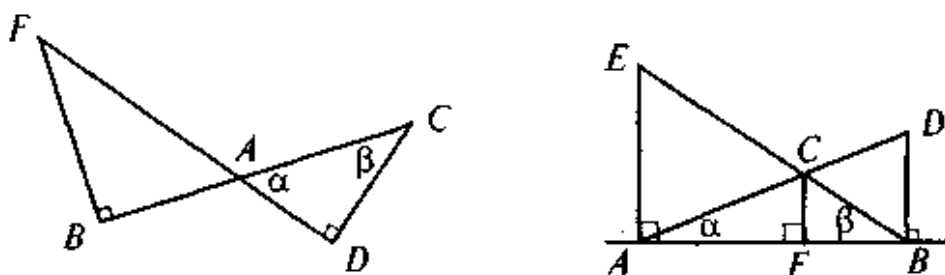


Рис. 2

#### V. Засвоєння знань

##### План вивчення нового матеріалу

1. Означення синуса гострого кута прямокутного трикутника. Його позначення.
2. Означення косинуса гострого кута прямокутного трикутника. Його позначення.
3. Означення тангенса гострого кута прямокутного трикутника. Його позначення.
4. Означення котангенса гострого кута прямокутного трикутника. Його позначення.
5. Властивості тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника.

@ Вивчення співвідношень між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику традиційно розпочинається з уведення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника та формулювання і доведення їх властивостей (залежність числових значень тільки від міри кута). У цьому плані теоретичний матеріал нового підручника не відрізняється від традиційного змісту відповідного розділу попереднього підручника. Проте, у зв'язку зі зміною послідовності вивчення матеріалу за новою програмою порівняно з попередньою, обґрунтування властивостей синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника змінилося. Тепер сформульовані властивості дуже легко доводяться із посиланням на подібність прямокутних трикутників (трикутники із спільним гострим кутом подібні за ознакою, отже, їх відповідні сторони пропорційні за означенням подібності трикутників).

Слід відзначити, що в новому підручнику міститься додатковий матеріал щодо семантики понять «синус», «косинус», «тангенс»; цей матеріал може допомогти учням швидше запам'ятати зміст означень цих понять.

Серед властивостей, які використовуються в задачах і які слід побачити «між рядками», необхідно виділити властивість, яка впливає з того, що в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, і навпаки. Ця властивість — зростання синуса гострого кута за зростання кута і спадання косинуса гострого кута за зростання кута — на цьому етапі вивчення тригонометрії може бути сформульована у вигляді твердження: більшому гострому куту прямокутного трикутника відповідає більше значення синуса і менше значення косинуса.

Вивчення змісту теоретичного матеріалу уроку доречно проводити відповідно до підручника за планом, поданим вище. Під час вивчення питання про спосіб позначення тригонометричних функцій слід одразу, попереджаючи типові помилки учнів, пояснити, що ці позначення є скороченим записом відповідної назви латинськими літерами (наприклад,  $\sin \alpha$  — це скорочення виразу «синус кута альфа»), а не добуток. Крім того, оскільки не існує абстрактних понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса (ці поняття обов'язково асоціюються з певним гострим кутом прямокутного трикутника), то й записи типу  $\sin$ ,  $\cos$  тощо просто не мають змісту.

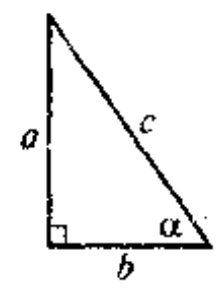
Домогтися розуміння учнями змісту вивченого матеріалу та його закріплення можна шляхом виконання вправ (див. нижче), запропонованих учням під час вивчення нового матеріалу.

1. Один з учнів 8 класу накреслив на дошці прямокутний трикутник із катетами 30 см і 50 см та обчислив значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута, що лежить проти меншого катета. Потім до дошки вийшов інший учень і сказав, що накреслить прямокутний трикутник із катетами 45 см і 75 см, у якому синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута, протилежного до найменшого катета, будуть більшими, бо його трикутник більший. Чи не помиляється цей восьмикласник? У чому його помилка?

2. Які з чисел:  $1$ ;  $0,5$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{4}{3}$ ;  $0$ ;  $-0,3$  можуть бути числовими значеннями синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника? Поясніть.

3. Прочитайте записи:  $\sin A = \frac{1}{2}$ ;  $\cos B = \frac{2}{3}$ ;  $\operatorname{tg} \gamma = 1$ ;  $\operatorname{ctg} \varphi = 2$ . Поясніть, що вони означають.

Після обговорення питань слід провести узагальнення способів застосування вивченого матеріалу, якщо треба знайти значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника, то використовують означення цих понять; якщо ж треба відповісти на питання стосовно даних значень тригонометричних функцій, то слід використовувати їх властивості. У вивченні нового матеріалу користуємося конспектом.

Конспект 21	
<p>Означення тригонометричних функцій гострого кута. Тригонометричні тотожності Якщо <math>0 &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> — гострий кут прямокутного трикутника, а —</p> <p style="text-align: right;"><math>\frac{a}{c}</math></p> <p>протилежний катет; <math>b</math> — прилеглий катет; <math>c</math> — гіпотенуза, то <math>\sin \alpha = \frac{b}{c}</math>, <math>\cos \alpha = \frac{a}{c}</math>, <math>\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}</math>, <math>\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}</math>.</p>	
<p>Властивості</p> <p>1) <math>0 &lt; \cos \alpha &lt; 1</math>, <math>0 &lt; \sin \alpha &lt; 1</math>, <math>\operatorname{tg} \alpha &gt; 0</math>, <math>\operatorname{ctg} \alpha &gt; 0</math>.</p> <p>2) Якщо <math>0 &lt; \alpha &lt; \beta &lt; 90^\circ</math>, то <math>\sin \alpha &lt; \sin \beta</math>, <math>\cos \alpha &gt; \cos \beta</math>, <math>\operatorname{tg} \alpha &lt; \operatorname{tg} \beta</math>.</p> <p>3) Якщо <math>\alpha = \beta</math>, то <math>\sin \alpha = \sin \beta</math>, <math>\cos \alpha = \cos \beta</math>, <math>\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta</math>, <math>\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta</math>.</p>	
Тригонометричні тотожності	
<p>1) <math>\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}</math>, <math>\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}</math>;</p> <p>2) <math>\operatorname{tga} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}</math>, <math>\operatorname{ctga} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}</math>, <math>\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1</math>.</p>	

## VI. Формування первинних умінь

### Виконання усних вправ

1. За рисунком 3 визначте, яка тригонометрична функція кута К виражається відношенням:

$$\frac{KN}{KM} ; \quad \frac{MN}{KN} ; \quad \frac{MN}{KM} .$$

а)  $\frac{KN}{KM}$  ; б)  $\frac{MN}{KN}$  ; в)  $\frac{MN}{KM}$  .

2. У прямокутному трикутнику KMN (рис. 3)  $KN > MN$ . Який із гострих кутів трикутника має більший синус; більший косинус; більший тангенс?

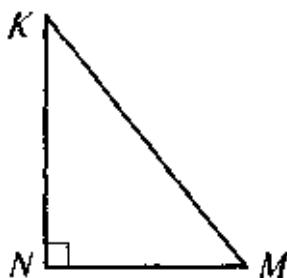


Рис. 3

3. Чи може синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати 0,99;  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$  – 2?

4. Чи може добуток синуса і косинуса одного кута дорівнювати одиниці? А добуток тангенса і котангенса?

5. Чи може тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнювати  $\sqrt{2}$ ; 0,01; 100?

### Виконання письмових вправ

1. Накресліть за допомогою транспортира прямокутний трикутник із гострим кутом  $40^\circ$ . Виміряйте його сторони та обчисліть синус, косинус і тангенс цього кута.

2. Побудуйте прямокутний трикутник ABC, в якому:

$$\frac{5}{6} ; \quad \frac{2}{3} .$$

а)  $\text{tg } A = \frac{5}{6}$  ; б)  $\sin A = \frac{2}{3}$  .

3. Побудуйте кут  $75^\circ$ . За допомогою додаткових побудов і вимірювань знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс цього кута.

4. Побудуйте гострий кут  $\alpha$ , якщо:

$$\frac{5}{8} ; \quad \frac{3}{4} .$$

а)  $\sin \alpha = \frac{5}{8}$  ; б)  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  .

5. Доведіть, що для будь-якого гострого кута A  $\text{tg } A > \sin A$ .

6. Катеті гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть:

а) синус гострого кута, що лежить проти більшого катета;

б) косинус гострого кута, прилеглого до меншого катета;

в) тангенс гострого кута, що лежить проти більшого катета.

@ Виконання всіх вправ має на меті закріплення учнями вивченої термінології та вивчених властивостей, а також розуміння сфери застосування вивченого матеріалу (див. висновок попереднього етапу уроку). Розв'язання задач передбачає додаткове повторення теореми Піфагора для обчислення невідомої сторони прямокутного трикутника перед застосуванням вивчених означень.

## VII. Підсумки уроку

Подайте різними способами косинус, синус і тангенс кутів  $\alpha$  і  $\beta$  (рис. 4).

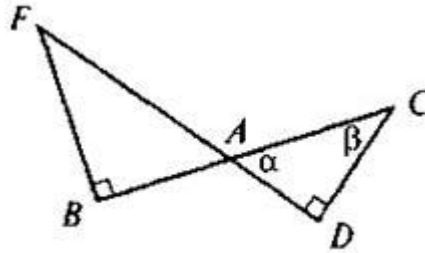


Рис. 4

## VIII. Домашнє завдання

Вивчити зміст означень синуса, косинуса, тангенса гострого кута, прямокутного трикутника та доведення їх властивостей.

Розв'язати задачі.

1. Накресліть гострий кут. Позначте на одній стороні кута дві точки і проведіть із них перпендикуляри до іншої сторони кута.

а) Виміряйте сторони прямокутних трикутників, що утворилися, та обчисліть двома способами синус побудованого кута. Порівняйте результати.

б) Обчисліть косинус побудованого кута двома способами — за означенням і за основною тригонометричною тотожністю. Порівняйте результати.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Обчисліть синус, косинус і тангенс найменшого кута трикутника.

3. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см, а довжина основи — 24 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

4. Доведіть, що для будь-якого гострого кута  $A$   $\cos A < \operatorname{ctg} A$ .